Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 7

Énergétique des fluides en écoulement stationnaire – TD

Exercice 1 : Questions de cours

Pour un fluide parfait de masse volumique ρ en écoulement stationnaire et incompressible dans une conduite, on définit :

- le système Σ constitué des particules de fluide contenues dans un tube de courant entre la section S_e et la section S_s ;
- le système Σ_e de volume $\mathrm{d}V_\text{e}$ constitué des particules de fluide qui entrent dans le système Σ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$;
- le système Σ_s de volume $\mathrm{d}V_\text{s}$ constitué des particules de fluide qui sortent du système Σ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$;
- le système Σ' tel que : $\begin{cases} \Sigma'(t) = \Sigma_\text{e} + \Sigma \\ \Sigma'(t+\mathrm{d}t) = \Sigma + \Sigma_\text{s} \end{cases}$.

1. Justifier que le système Σ' est un système fermé.

2. Exprimer les volumes $\mathrm{d}V_\text{e}$ et $\mathrm{d}V_\text{s}$ en fonction du débit volumique.

3. Établir la relation de Bernoulli en appliquant le théorème de l'énergie mécanique au système Σ' entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.

Correction :

1. Le système Σ' est un système fermé car il est constitué des mêmes particules de fluide entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.

2. On peut exprimer : $\mathrm{d}V_\text{e} = S_\text{e}\, v_\text{e}\, \mathrm{d}t = D_\text{V}\, \mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}V_\text{s} = S_\text{s}\, v_\text{s}\, \mathrm{d}t = D_\text{V}\, \mathrm{d}t$.

3. L'application du théorème de l'énergie mécanique donne : $\mathrm{d}E_\text{m} = \delta W_\text{P} = \delta W_\text{P,e} + \delta W_\text{P,s}$, avec :

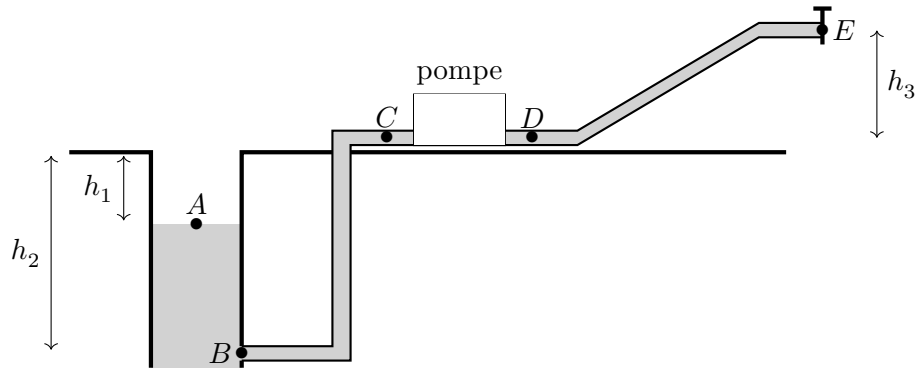
- la variation d'énergie mécanique $\mathrm{d}E_\text{m} = E_\text{m}(t+\mathrm{d}t) - E_\text{m}(t) = \left[E_{\text{m},} + E_{\text{m},_\text{s}}\right] - \left[E_{\text{m},_\text{e}} + E_{\text{m},}\right]$, où on peut exprimer $E_{\text{m},_\text{e}} = E_{\text{c},_\text{e}} + E_{\text{pp},_\text{e}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}m_\text{e}\, v_\text{e}^2 + \mathrm{d}m_\text{e}\, g\, z_\text{e} = \dfrac{1}{2}\,\rho\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t\, v_\text{e}^2 + \rho\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t\, g\, z_\text{e}$ et de façon équivalente $E_{\text{m},_\text{s}} = \dfrac{1}{2}\,\rho\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t\, v_\text{s}^2 + \rho\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t\, g\, z_\text{s}$;
- le travail des forces de pression d'admission $\delta W_\text{P,e} = P_\text{e}\,\mathrm{d}V_\text{e} = P_\text{e}\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t$;
- le travail des forces de pression de refoulement $\delta W_\text{P,s} = -P_\text{s}\,\mathrm{d}V_\text{s} = -P_\text{s}\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t$.

On obtient : $\dfrac{1}{2}\,\rho\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t\, v_\text{s}^2 + \rho\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t\, g\, z_\text{s} - \dfrac{1}{2}\,\rho\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t\, v_\text{e}^2 - \rho\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t\, g\, z_\text{e} = P_\text{e}\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t - P_\text{s}\, D_\text{V}\,\mathrm{d}t$, d'où on en déduit la relation de Bernoulli en simplifiant : $P_\text{e} + \dfrac{1}{2}\,\rho\, v_\text{e}^2 + \rho\, g\, z_\text{e} = P_\text{s} + \dfrac{1}{2}\,\rho\, v_\text{s}^2 + \rho\, g\, z_\text{s}$.

Exercice 2 : Captage d'eau au fond d'un puits

Un dispositif de captage d'eau au fond d'un puits pour une installation domestique est constitué d'une pompe connectée à un circuit d'aspiration et à un circuit de refoulement.

- Le circuit d'aspiration BC assure la prise d'eau au point B au fond du puits de profondeur $h_2 = 6{,}0\,\text{m}$ à l'aide d'une canalisation cylindrique de diamètre $d_1 = 40\,\text{mm}$ et de longueur $L_1 = 6{,}5\,\text{m}$. Le point A à la surface de la réserve d'eau est supposé immobile et à la pression atmosphérique $P_A = P_\text{atm} = 1{,}0\,\text{bar}$, il se trouve à une profondeur $h_1 = 4{,}5\,\text{m}$ du sol.
- Le circuit de refoulement DE à la sortie de la pompe permet de distribuer l'eau jusqu'au point E où un robinet nécessite une pression $P_E = P_\text{atm} + P_\text{u}$, avec $P_\text{u} = 2{,}5\,\text{bar}$ la surpression utile. La canalisation cylindrique de diamètre $d_2 = 32\,\text{mm}$ et de longueur $L_2 = 6{,}0\,\text{m}$ présente une dénivellation $h_3 = 3{,}5\,\text{m}$.



On souhaite déterminer la puissance d'alimentation électrique de la pompe permettant d'obtenir un débit volumique $D_\mathrm{V} = 6{,}0\,\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$ en régime stationnaire au niveau du robinet. On suppose pour cela que l'eau est un fluide incompressible de masse volumique $\rho = 1{,}0\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$.

Dans un premier temps, on suppose que l'écoulement est parfait, c'est-à-dire sans perte de charge.

1. Calculer la vitesse moyenne v_1 dans le circuit d'aspiration et la vitesse moyenne v_2 dans le circuit de refoulement.

2. À l'aide de la relation de Bernoulli en présence d'un élément actif, exprimer le travail massique w_p que doit fournir la pompe en fonction de h_1, h_3, g, v_2, P_u et ρ.

3. En déduire la puissance que doit fournir la pompe à l'écoulement.

On souhaite maintenant prendre en compte les pertes de charge dans l'écoulement. On rappelle que le nombre de Reynolds pour un écoulement d'eau à la vitesse v dans une conduite de diamètre d est défini tel que :

$$Re = \frac{v\,d\,\rho}{\eta}$$

avec $\eta = 1{,}0.10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$ la viscosité dynamique de l'eau.

4. Calculer le nombre de Reynolds pour l'écoulement d'aspiration et pour l'écoulement de refoulement.

Pour un écoulement dont le nombre de Reynolds est inférieur à 10^5, on peut estimer les pertes de charge régulières dans une conduite de longueur L par la formule suivante :

$$\Delta P^* = \frac{L\,v^2}{6\,d}\,Re^{-0{,}25}.$$

5. Calculer les pertes de charge régulières dans ce dispositif.

On admet que les pertes de charge singulières dans chaque circuit peuvent se calculer à l'aide de la formule suivante :

$$\Delta P^* = K\,\frac{v^2}{2}$$

avec $K = 0{,}9$ pour le circuit d'aspiration et $K = 1{,}2$ pour le circuit de refoulement.

6. Calculer les pertes de charge singulières dans ce dispositif.

7. En tenant compte de l'ensemble des pertes de charge, déterminer la puissance réelle que doit fournir la pompe à l'écoulement, puis comparer ce résultat au cas d'un écoulement parfait.

8. Sachant que la pompe possède un rendement de 70%, déterminer la puissance d'alimentation électrique nécessaire.

Correction :

1. La vitesse moyenne dans le circuit d'aspiration est : $v_1 = \dfrac{D_\mathrm{V}}{\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2} = 1{,}3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, et celle dans le circuit de refoulement est : $v_2 = \dfrac{D_\mathrm{V}}{\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 2{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2. L'application de la relation de Bernoulli en présence d'un élément actif entre le point A et le point E donne : $P_A + \frac{1}{2}\rho\,v_A^2 + \rho\,g\,z_A + \rho\,w_\mathrm{p} = P_E + \frac{1}{2}\rho\,v_E^2 + \rho\,g\,z_E$, soit :

$P_{\text{atm}} - \rho\, g\, h_1 + \rho\, w_{\text{p}} = P_{\text{atm}} + P_{\text{u}} + \dfrac{1}{2}\,\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, h_3$, d'où le travail massique que doit fournir la pompe : $w_{\text{p}} = \dfrac{P_{\text{u}}}{\rho} + \dfrac{1}{2}\, v_2^2 + g\,(h_1 + h_3)$.

3. La puissance que doit fournir la pompe est : $\Phi_{\text{p}} = D_{\text{m}}\, w_{\text{p}} = \rho\, D_{\text{V}} \left[\dfrac{P_{\text{u}}}{\rho} + \dfrac{1}{2}\, v_2^2 + g\,(h_1 + h_3)\right] = 5{,}5.10^2\,\text{W}$.

4. Le nombre de Reynolds pour l'écoulement d'aspiration est : $Re_1 = \dfrac{v_1\, d_1\, \rho}{\eta} = 5{,}3.10^4$, et celui pour l'écoulement de refoulement est : $Re_2 = \dfrac{v_2\, d_2\, \rho}{\eta} = 6{,}7.10^4$.

5. Comme Re_1 et Re_2 sont inférieurs à 10^5, les pertes de charge régulières dans ce dispositif sont : $\Delta P_{\text{r}}^* = \dfrac{L_1\, v_1^2}{6\, d_1}\, Re_1^{-0{,}25} + \dfrac{L_2\, v_2^2}{6\, d_2}\, Re_2^{-0{,}25} = 11{,}5\,\text{Pa}$.

6. Les pertes de charge singulières dans ce dispositif sont : $\Delta P_{\text{s}}^* = 0{,}9 \times \dfrac{v_1^2}{2} + 1{,}2 \times \dfrac{v_2^2}{2} = 3{,}4\,\text{Pa}$.

7. En tenant compte de l'ensemble des pertes de charges, l'application de la relation de Bernoulli entre le point A et le point E donne : $P_A + \dfrac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 + \rho\, g\, z_A + \rho\, w'_{\text{p}} = P_E + \dfrac{1}{2}\,\rho\, v_E^2 + \rho\, g\, z_E + \Delta P_{\text{r}}^* + \Delta P_{\text{s}}^*$, soit : $P_{\text{atm}} - \rho\, g\, h_1 + \rho\, w'_{\text{p}} = P_{\text{atm}} + P_{\text{u}} + \dfrac{1}{2}\,\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, h_3 + \Delta P_{\text{r}}^* + \Delta P_{\text{s}}^*$, d'où le travail massique que doit fournir la pompe : $w'_{\text{p}} = \dfrac{P_{\text{u}} + \Delta P_{\text{r}}^* + \Delta P_{\text{s}}^*}{\rho} + \dfrac{1}{2}\, v_2^2 + g\,(h_1 + h_3)$.

On en déduit la puissance réelle : $\Phi'_{\text{p}} = D_{\text{m}}\, w'_{\text{p}} = \rho\, D_{\text{V}} \left[\dfrac{P_{\text{u}} + \Delta P_{\text{r}}^* + \Delta P_{\text{s}}^*}{\rho} + \dfrac{1}{2}\, v_2^2 + g\,(h_1 + h_3)\right] = 5{,}5.10^2\,\text{W}$.

Comme $\Phi'_{\text{p}} \approx \Phi_{\text{p}}$, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les pertes de charge pour ce dispositif.

8. Comme le rendement s'exprime : $r = \dfrac{\Phi_{\text{p}}}{\Phi_{\text{élec}}}$, on en déduit la puissance d'alimentation électrique de la pompe : $\Phi_{\text{élec}} = \dfrac{\Phi_{\text{p}}}{r} = 7{,}8.10^2\,\text{W}$.

Exercice 3 : Vidange d'un réservoir

On considère une cuve cylindrique de récupération d'eau de pluie, de diamètre $a = 50\,\text{cm}$, remplie jusqu'à une hauteur $h = 1{,}8\,\text{m}$. La surface libre de l'eau, située à l'altitude z, est en contact avec l'air à la pression atmosphérique P_{atm}. La cuve se vide par un trou de diamètre $d = 1{,}0\,\text{cm}$ percé à sa base en $z = 0$.

On considère dans un premier temps que la hauteur d'eau dans la cuve ne varie presque pas au cours du temps, l'écoulement est alors stationnaire.

1. Justifier cette approximation.

2. Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli.

3. En considérant que ces conditions sont vérifiées, déterminer la vitesse v_0 de l'eau en sortie de la cuve.

4. Calculer le temps qu'il faut pour remplir un arrosoir de 15 L placé sous le trou.

On souhaite maintenant déterminer le temps nécessaire pour vider entièrement la cuve à travers le trou.

5. Montrer que la hauteur d'eau $z(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\text{d}z}{\text{d}t} = -\frac{d^2}{a^2}\,\sqrt{2\, g\, z(t)}$$

avec g l'accélération de la pesanteur.

6. Calculer le temps de vidange de la cuve.

Un tuyau horizontal de longueur $L = 1{,}0\,\text{m}$ et de diamètre $D = 4{,}0\,\text{cm}$ est raccordé à la sortie de la cuve remplie. On peut estimer la perte de charge dans ce tuyau avec la formule de Blasius :

$$\Delta P^* = 0{,}016 \times \frac{1}{2}\,\rho\, v_0^2\, \frac{L}{D}$$

avec ρ la masse volumique de l'eau.

7. Calculer la perte de charge dans ce tuyau.

8. Déterminer la vitesse de l'eau en sortie du tuyau lorsque la cuve est remplie.

Correction :

1. En supposant que l'eau est incompressible, la conservation du débit volumique pour cet écoulement stationnaire donne : $D_\mathrm{V} = v_\mathrm{surface}\,\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = v_\mathrm{base}\,\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$.

Comme $d \ll a$, on en déduit : $v_\mathrm{surface} \ll v_\mathrm{base}$, et on peut ainsi considérer que la hauteur d'eau est constante, l'écoulement est donc stationnaire.

2. La relation de Bernoulli s'applique le long d'une ligne de courant pour un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible.

3. L'application de la relation de Bernoulli entre un point A à la surface de l'eau et un point B en sortie de la cuve donne : $P_A + \frac{1}{2}\rho\,v_A^2 + \rho\,g\,z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho\,v_B^2 + \rho\,g\,z_B$, avec $P_A = P_B = P_\mathrm{atm}$, $v_A \approx 0$, $v_B = v_0$, $z_A = h$ et $z_B = 0$. On aboutit alors la formule de Torricelli : $v_0 = \sqrt{2\,g\,h} = 5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4. Par définition du débit volumique, l'arrosoir de volume V se remplit en un temps $T = \dfrac{V}{D_\mathrm{V}} = \dfrac{V}{v_0\,\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 32\,\mathrm{s}$.

5. La vitesse de l'eau en sortie de la cuve est : $v_0 = \sqrt{2\,g\,z(t)}$.

Par conversation du débit volumique, on en déduit la vitesse de la surface : $v_\mathrm{surface} = \dfrac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}\,v_0 = \dfrac{d^2}{a^2}\,v_0$.

Cette vitesse s'exprime en fonction de la hauteur d'eau z telle que : $v_\mathrm{surface} = -\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, comme z décroit pour obtenir $v_\mathrm{surface} > 0$ dans l'expression du débit.

On obtient donc : $-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{d^2}{a^2}\,v_0 = \dfrac{d^2}{a^2}\,\sqrt{2\,g\,z(t)}$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{d^2}{a^2}\,\sqrt{2\,g\,z(t)}$.

6. On résout l'équation différentielle par séparation des variables : $\dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = -\dfrac{d^2}{a^2}\,\sqrt{2\,g}\,\mathrm{d}t$.

En intégrant entre $t = 0$ (où $z = h$) et t_vidange (où $z = 0$), on obtient : $\left[2\sqrt{z}\right]_h^0 = -\dfrac{d^2}{a^2}\,\sqrt{2\,g}\,\left[t\right]_0^{t_\mathrm{vidange}}$,

d'où : $t_\mathrm{vidange} = \sqrt{\dfrac{2\,h}{g}}\,\dfrac{a^2}{d^2} = 1{,}5.10^3\,\mathrm{s} = 25\,\mathrm{min}$.

7. On calcule : $\Delta P^* = 0{,}016 \times \dfrac{1}{2}\,\rho\,v_0^2\,\dfrac{L}{D} = 7{,}1.10^3\,\mathrm{Pa}$.

8. En appliquant la relation de Bernoulli entre un point A à la surface de l'eau et un point C à la sortie du tuyau, on obtient : $P_A + \frac{1}{2}\rho\,v_A^2 + \rho\,g\,z_A = P_C + \frac{1}{2}\rho\,v_C^2 + \rho\,g\,z_C + \Delta P^*$, avec $P_A = P_C = P_\mathrm{atm}$, $v_A \approx 0$, $z_A = h$ et $z_C = 0$, d'où la vitesse : $v_C = \sqrt{2\,g\,h - \dfrac{2\,\Delta P^*}{\rho}} = 4{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Exercice 4 : Coefficient de portance du Sky-Sailor

Le Sky-Sailor est un prototype d'avion autonome conçu pour voler sur Mars. Son maintien en vol est assuré par une force aérodynamique, appelée force de portance, dont l'expression est :

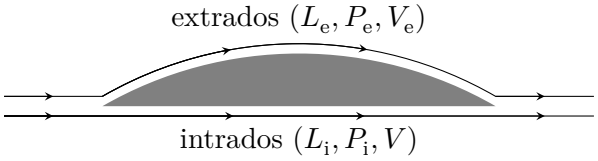
$$\overrightarrow{F_\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\,\rho\,S\,C_\mathrm{p}\,V^2\,\vec{e}_z$$

avec ρ la masse volumique de l'atmosphère martienne, S la surface de ses ailes, C_p une constante appelée coefficient de portance, V sa vitesse horizontale, et $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire ascendant.

1. Déterminer la dimension du coefficient de portance C_p.

Une coupe de profil d'une aile du Sky-Sailor est présentée ci-dessous. La surface supérieure de son aile est appelée extrados, tandis que la surface inférieure est appelée intrados. On note :

- L_e (respectivement L_i) la longueur de l'extrados (respectivement de l'intrados) ;
- P_e (respectivement P_i) la pression immédiatement au-dessus de l'extrados (respectivement en dessous de l'intrados) ;
- V_e la vitesse immédiatement au-dessus de l'extrados, et on suppose que la vitesse immédiatement en dessous de l'intrados est constante et égale à V.



2. Exprimer la norme de la force de portance s'exerçant sur l'aile en fonction de P_i, P_e et S.

Dans le cadre d'un modèle simple, on admet que le temps mis par les particules de fluides pour parcourir le trajet le long de l'extrados est identique à celui pour parcourir le trajet le long de l'intrados.

3. Déterminer une relation entre V_e, V, L_e et L_i.

4. Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli.

On suppose que ces conditions sont vérifiées pour la suite, et négligera la variation d'altitude liée à l'épaisseur de l'aile.

5. Déterminer l'expression du coefficient de portance C_p en fonction de L_e et L_i.

6. Sachant que l'extrados du Sky-Sailor est 2% plus long que son intrados, calculer numériquement C_p.

Correction :

1. L'analyse dimensionnelle donne : $\dim\left(C_p\right) = \dfrac{\dim\left(F_p\right)}{\dim\left(\rho\right)\dim\left(S\right)\dim\left(V\right)^2} = \dfrac{M\,L\,T^{-2}}{\left(M\,L^{-3}\right)L^2\left(L\,T^{-1}\right)^2} = 1$, le coefficient de portance est sans dimension.

2. La norme de la force de portance s'exprime en fonction de la différence de pression : $F_p = \left(P_i - P_e\right)S$.

3. Le temps mis par les particules de fluides pour parcourir l'extrados est $\dfrac{L_e}{V_e}$, et celui pour parcourir l'intrados est $\dfrac{L_i}{V}$. Comme ces temps sont identiques, on en déduit la relation : $\dfrac{L_e}{V_e} = \dfrac{L_i}{V}$.

4. La relation de Bernoulli s'applique le long d'une ligne de courant pour un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible.

5. En notant P_0 la pression et V_0 la vitesse en un point situé en amont de l'aile qui est en contact avec les deux lignes de courant, l'application de la relation de Bernoulli donne :

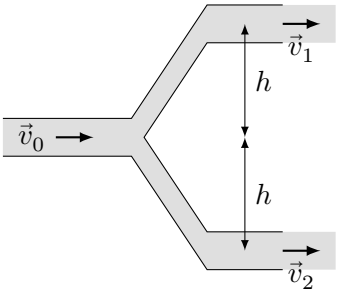
- le long de la ligne de courant de l'extrados : $P_0 + \dfrac{1}{2}\rho V_0^2 + \rho g z = P_e + \dfrac{1}{2}\rho V_e^2 + \rho g z$;
- le long de la ligne de courant de l'intrados : $P_0 + \dfrac{1}{2}\rho V_0^2 + \rho g z = P_i + \dfrac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z$;

d'où en égalisant : $P_e + \dfrac{1}{2}\rho V_e^2 = P_i + \dfrac{1}{2}\rho V^2$. La norme de la force de portance peut alors s'exprimer : $F_p = \dfrac{1}{2}\rho\left(V_e^2 - V^2\right)S = \dfrac{1}{2}\rho\left(\dfrac{L_e^2 V^2}{L_i^2} - V^2\right)S = \dfrac{1}{2}\rho V^2\left(\dfrac{L_e^2}{L_i^2} - 1\right)S$. Par identification avec l'expression donnée, on en déduit l'expression du coefficient de portance : $C_p = \dfrac{L_e^2}{L_i^2} - 1$.

6. Comme $L_e = 1{,}02 \times L_i$, on obtient : $C_p = 4.10^{-2}$.

Exercice 5 : Répartition d'une distribution hydraulique

Une conduite principale de section $S = 10\,\text{cm}^2$ dans laquelle circule de l'eau avec un débit volumique $D_V = 5{,}0\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$ se sépare en deux conduites secondaires, chacune également de section S, après une fourche de séparation. On considère que l'eau est un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible. Les deux conduites secondaires débouchent sur l'air libre à la pression atmosphérique.



On considère dans un premier temps que le dispositif est horizontal. Toutes les conduites sont alors à la même altitude, et cela revient à négliger l'effet de la pesanteur.

1. Calculer les vitesses v_1 et v_2 du fluide dans les conduites secondaires.

On considère maintenant que le dispositif est vertical. Chaque conduite secondaire présente alors une différence d'altitude $h = 30\,\text{cm}$ avec la conduite principale.

2. Déterminer une première relation liant les vitesses v_1 et v_2 en effectuant un bilan de débit.

3. Déterminer une seconde relation liant les vitesses v_1 et v_2 en utilisant la relation de Bernoulli.

4. En déduire les valeurs des vitesses v_1 et v_2.

5. Calculer le rapport des deux débits en sortie, puis conclure sur l'effet de la gravité sur ce dispositif.

Correction :

1. Par symétrie, la conservation du débit volumique impose : $D_{\text{V},1} = D_{\text{V},2} = \dfrac{D_\text{V}}{2}$, d'où on en déduit les vitesses : $v_1 = v_2 = \dfrac{D_{\text{V},1}}{S} = \dfrac{D_\text{V}}{2\,S} = 2{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. La conservation du débit volumique donne : $D_\text{V} = D_{\text{V},1} + D_{\text{V},2} = v_1\,S + v_2\,S$, d'où : $v_1 + v_2 = \dfrac{D_\text{V}}{S}$.

3. On applique la relation de Bernoulli le long de deux lignes de courant :

- entre un point de la conduite principale et un point de la conduite du haut, et on obtient : $P_0 + \dfrac{1}{2}\,\rho\,v_0^2 + \rho\,g\,z_0 = P_1 + \dfrac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,z_1$;
- entre un point de la conduite principale et un point de la conduite du bas, et on obtient : $P_0 + \dfrac{1}{2}\,\rho\,v_0^2 + \rho\,g\,z_0 = P_2 + \dfrac{1}{2}\,\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,z_2$.

Comme $P_1 = P_2 = P_\text{atm}$, on obtient en égalisant les deux équations : $\dfrac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,z_1 = \dfrac{1}{2}\,\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,z_2$, soit : $v_2^2 - v_1^2 = 2\,g\,(z_1 - z_2) = 4\,g\,h$.

4. Pour résoudre le système de deux équations, on peut remarquer que : $v_2^2 - v_1^2 = (v_2 + v_1)\,(v_2 - v_1) = \dfrac{D_\text{V}}{S}\,(v_2 - v_1)$, d'où : $v_2 - v_1 = 4\,g\,h\,\dfrac{S}{D_\text{V}}$.

On obtient finalement : $v_1 = \dfrac{D_\text{V}}{2\,S} - \dfrac{2\,g\,h\,S}{D_\text{V}} = 1{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_2 = \dfrac{D_\text{V}}{2\,S} + \dfrac{2\,g\,h\,S}{D_\text{V}} = 3{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

5. Le rapport des deux débits en sortie est : $\dfrac{D_{\text{V},2}}{D_{\text{V},1}} = \dfrac{v_2\,S}{v_1\,S} = \dfrac{v_2}{v_1} = 2{,}8$.

Le débit dans la conduite du bas est presque trois fois plus important que celui dans la conduite du haut à cause de l'effet de la gravité.